# Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Madrid 2021, Extraordinaria

# Ejercicio 1. Opción A. Álgebra

**Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15 000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25% de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.**

**Solución:**

**Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.**

Sean $x$, $y$, $z$ el número de seguidores de Sara, Cristina y Jimena, respectivamente.

Planteamos el sistema de ecuaciones lineales según las condiciones del enunciado:

1. **Total de seguidores:** $x + y + z = 15000$.
2. **Condición Jimena-Sara:** Si Jimena perdiera el 25%, le quedaría el 75% de sus seguidores. Esta cantidad sería el triple que los de Sara.
$$z - 0.25z = 3x \implies 0.75z = 3x \implies z = \frac{3}{0.75}x \implies z = 4x.$$
Podemos escribir esta ecuación como $4x - z = 0$.
3. **Condición Sara-Cristina-Jimena:** La mitad de los de Sara más un quinto de los de Cristina es un cuarto de los de Jimena.
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = \frac{z}{4}.$$
Multiplicamos por el mínimo común múltiplo (20) para eliminar denominadores:
$$10x + 4y = 5z \implies 10x + 4y - 5z = 0.$$

El sistema de ecuaciones es:
$$\begin{cases} x + y + z = 15000 \\ 4x - z = 0 \\ 10x + 4y - 5z = 0 \end{cases}$$

*Discusión del sistema (Teorema de Rouché-Frobenius):* La matriz de coeficientes (A) y la matriz ampliada (A*) son:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 10 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad (A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15000 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 10 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right)$$
Calculamos el determinante de A:
$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 10 & 4 & -5 \end{vmatrix} \\ &= 1(0 - (-4)) - 1(-20 - (-10)) + 1(16 - 0) \\ &= 4 - (-10) + 16 = 30 \end{aligned}$$
Como $|A| = 30 \neq 0$, el rango de la matriz de coeficientes es 3 ($\text{Rg}(A) = 3$). El rango de la matriz ampliada también es 3 ($\text{Rg}(A^*) = 3$). El número de incógnitas es 3. Dado que $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $= 3$, el sistema es Compatible Determinado (S.C.D.).

$$\boxed{\textbf{El sistema es Compatible Determinado (S.C.D.)}}$$

*Resolución del sistema (Regla de Cramer):* Ya sabemos que $|A| = 30$. Calculamos los determinantes para cada variable:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 15000 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 15000(0 - (-4)) = 60000.$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 15000 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 10 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -15000(-20 - (-10)) = -15000(-10) = 150000.$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 15000 \\ 4 & 0 & 0 \\ 10 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 15000(16 - 0) = 240000.$$

Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{60000}{30} = 2000.$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{150000}{30} = 5000.$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{240000}{30} = 8000.$$

**Sara tiene 2000 seguidores, Cristina tiene 5000 seguidores y Jimena tiene 8000 seguidores.**

# Ejercicio 2. Opción A. Análisis

**a) Calcule, en caso de existir, el valor de los siguientes límites:**

**a.1)** $\lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\sin x}$

**a.2)** $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{3}{x} - \frac{2}{\sin\frac{1}{x}}\right)$

**(Indicación: use el cambio de variable $t = 1/x$ donde sea necesario).**

**b) Calcule las siguientes integrales:**

**b.1)** $\int \frac{x}{x^2-1} dx$

**b.2)** $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

**Solución:**

**a) Calcule, en caso de existir, el valor de los siguientes límites:**

**a.1)** $\lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\sin x}$

Evaluamos el límite sustituyendo $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-2x^3}{x-2x^2-\sin x} = \frac{0}{0}.$$

Indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x-6x^2}{1-4x-\cos x} = \frac{0}{1-0-1} = \frac{0}{0}.$$

Indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicamos L'Hôpital de nuevo.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2-12x}{-4+\sin x} = \frac{2-0}{-4+0} = -\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\sin x} = -\frac{1}{2}}$$

**a.2)** $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{3}{x} - \frac{2}{\sin\frac{1}{x}}\right)$

Cambio de variable $t = 1/x$. Si $x \to \infty$, $t \to 0^+$.

$$\lim_{t\to 0^+} t\left(3t - \frac{2}{\sin t}\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(3t^2 - \frac{2t}{\sin t}\right).$$

Evaluamos por separado:

$$\lim_{t\to 0^+} 3t^2 = 0.$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{2t}{\sin t} = \frac{0}{0}.$$

Aplicamos L'Hôpital al segundo término:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{2}{\cos t} = \frac{2}{1} = 2.$$

El límite total es $0 - 2 = -2$.

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{3}{x} - \frac{2}{\sin\frac{1}{x}}\right) = -2}$$

**b) Calcule las siguientes integrales:**

**b.1)** $\int \frac{x}{x^2-1}dx$

Integral casi inmediata (tipo logaritmo). Sea $u = x^2 - 1$, $du = 2xdx$.

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C.$$

$$\boxed{\int \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C}$$

**b.2)** $\int_0^1 x^2e^{-x}dx$

Calculamos la primitiva por partes dos veces. $\int x^2e^{-x}dx$.
Parte 1: $u = x^2, dv = e^{-x}dx \implies du = 2xdx, v = -e^{-x}$. $\int = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx$.
Parte 2: $u = x, dv = e^{-x}dx \implies du = dx, v = -e^{-x}$. $\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \int(-e^{-x})dx = -xe^{-x} - e^{-x} = -(x+1)e^{-x}$.
Sustituyendo: $\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + 2(-(x+1)e^{-x}) = -e^{-x}(x^2+2x+2)$.

Aplicamos Barrow:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2e^{-x}dx &= \left[-e^{-x}(x^2+2x+2)\right]_0^1 \\ &= (-e^{-1}(1+2+2)) - (-e^0(0+0+2)) \\ &= -5e^{-1} - (-2) = 2 - 5e^{-1}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 x^2e^{-x}dx = 2 - \frac{5}{e}}$$

# Ejercicio 3. Opción A. Geometría

**Dado el punto $A(1,0,-1)$, la recta $r \equiv x-1 = y+1 = \frac{z-2}{2}$ y el plano $\pi \equiv x+y-z=6$, se pide:**

a) **Hallar el ángulo que forman el plano $\pi$ y el plano perpendicular a la recta $r$ que pasa por el punto A.**
b) **Determinar la distancia entre la recta $r$ y el plano $\pi$.**
c) **Calcular una ecuación de la recta que pasa por A, forma un ángulo recto con la recta $r$ y no corta al plano $\pi$.**

**Solución:**

a) **Hallar el ángulo que forman el plano $\pi$ y el plano perpendicular a la recta $r$ que pasa por el punto A.**

Plano $\pi : x+y-z=6 \implies \vec{n}_\pi = (1,1,-1)$.
Recta $r : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2} \implies \vec{d_r} = (1,1,2)$.
Plano $\alpha$: Perpendicular a $r$ pasando por $A(1,0,-1)$.
Su vector normal es $\vec{n}_\alpha = \vec{d_r} = (1,1,2)$.
Ángulo $\theta$ entre $\pi$ y $\alpha$:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{n}_\pi||\vec{n}_\alpha|} = \frac{|(1,1,-1)\cdot(1,1,2)|}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \frac{|1+1-2|}{\sqrt{18}} = \frac{0}{\sqrt{18}} = 0.$$

$\implies \theta = 90°$.

$$\boxed{\textbf{Los planos son perpendiculares, forman un ángulo de 90°.}}$$

b) **Determinar la distancia entre la recta $r$ y el plano $\pi$.**

Posición relativa $r$ y $\pi$: $\vec{d_r} \cdot \vec{n}_\pi = (1,1,2)\cdot(1,1,-1) = 1+1-2 = 0$.
Son paralelos o $r \subset \pi$.
Punto de $r$: $P_r(1,-1,2)$. ¿$P_r \in \pi$? $1+(-1)-2 = -2 \neq 6$. No pertenece.
Luego $r$ es paralela a $\pi$.
Distancia $d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \frac{|1(1)+1(-1)-1(2)-6|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

$$\boxed{d(r,\pi) = \frac{8\sqrt{3}}{3}\ \mathbf{u}}$$

c) **Calcular una ecuación de la recta que pasa por A, forma un ángulo recto con la recta $r$ y no corta al plano $\pi$.**

Recta $s$: Pasa por $A(1,0,-1)$. Sea $\vec{d_s}$ su vector director.
1. $s \perp r \implies \vec{d_s} \perp \vec{d_r} = (1,1,2)$.
2. $s$ no corta a $\pi \implies s \parallel \pi \implies \vec{d_s} \perp \vec{n}_\pi = (1,1,-1)$. $\vec{d_s}$ es perpendicular a $\vec{d_r}$ y $\vec{n}_\pi$. Podemos tomar $\vec{d_s} = \vec{d_r} \times \vec{n}_\pi$.

$$\vec{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3,3,0).$$

Podemos usar el vector proporcional $\vec{d'_s} = (1,-1,0)$.

Recta $s$: Pasa por $A(1,0,-1)$, vector director $(1,-1,0)$.
Ecuación paramétrica:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{\boldsymbol{s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -1 \end{cases} \quad , \lambda} \in \mathbb{R}}$$

# Ejercicio 4. Opción A. Probabilidad

**En una urna hay dos bolas blancas y cuatro bolas negras. Se extrae una bola al azar. Si la bola extraída es blanca, se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra, no se devuelve a la urna. A continuación, se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.**

a) **¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?**
b) **¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?**

**Solución:**

a) **¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?**

$B_1$: Blanca 1ª, $N_1$: Negra 1ª, $B_2$: Blanca 2ª, $N_2$: Negra 2ª.
Urna inicial: 2B, 4N (Total 6). $P(B_1) = 1/3, P(N_1) = 2/3$.
Si $B_1$: Urna 3B, 4N (Total 7). $P(B_2|B_1) = 3/7, P(N_2|B_1) = 4/7$.
Si $N_1$: Urna 2B, 3N (Total 5). $P(B_2|N_1) = 2/5, P(N_2|N_1) = 3/5$.

$$P(\text{Distinto color}) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) = P(N_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|N_1)P(N_1)$$

$$P(\text{Distinto color}) = (4/7)(1/3) + (2/5)(2/3) = 4/21 + 4/15 = (20 + 28)/105 = 48/105 = 16/35$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(\text{Distinto color}) = \frac{16}{35}}}$$

b) **¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?**

Se pide $P(N_1|B_2)$.
Usamos Bayes:

$$P(N_1|B_2) = \frac{P(B_2|N_1)P(N_1)}{P(B_2)}$$

Calculamos $P(B_2)$ por Probabilidad Total:

$$P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|N_1)P(N_1)$$

$$P(B_2) = (3/7)(1/3) + (2/5)(2/3) = 1/7 + 4/15 = (15 + 28)/105 = 43/105$$

Aplicamos Bayes:

$$P(N_1|B_2) = \frac{(2/5)(2/3)}{43/105} = \frac{4/15}{43/105} = \frac{4}{15} \cdot \frac{105}{43} = \frac{28}{43}$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(N_1|B_2) = \frac{28}{43}}}$$

# Ejercicio 1. Opción B. Álgebra

a) **Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables $x$ e $y$, que tenga como soluciones $\{x=1, y=2\}$ y $\{x=0, y=0\}$.**

b) **Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables $x, y$ y $z$ cuyas soluciones sean, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:**

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda - 2 \\ z = \lambda - 1 \end{cases}$$

c) **Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, $x$ e $y$, que solo tenga como solución a $x=1$ y $y=2$.**

**Solución:**

a) **Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables $x$ e $y$, que tenga como soluciones $\{x=1, y=2\}$ y $\{x=0, y=0\}$.**

Un sistema lineal con dos soluciones distintas debe tener infinitas soluciones. Las soluciones $(0,0)$ y $(1,2)$ deben estar en la misma recta. La recta que pasa por $(0,0)$ y $(1,2)$ es $y=2x$, o $2x-y=0$. Un sistema de dos ecuaciones lineales cuyas soluciones sean todos los puntos de esta recta debe consistir en dos ecuaciones linealmente dependientes que representen esta recta.

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$$

(La segunda ecuación es el doble de la primera).

$$\boxed{\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}}$$

b) **Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables $x, y$ y $z$ cuyas soluciones sean, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda - 2 \\ z = \lambda - 1 \end{cases}$

Las ecuaciones paramétricas representan una recta. Necesitamos dos planos cuya intersección sea esta recta.
Eliminamos $\lambda$:
De $x=\lambda$ y $y=\lambda-2 \implies y = x-2 \implies x-y=2$.
De $x=\lambda$ y $z=\lambda-1 \implies z = x-1 \implies x-z=1$.
El sistema es la intersección de estos dos planos:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x - y = 2 \\ x - z = 1 \end{cases}}$$

**c) Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, que solo tenga como solución a $\boldsymbol{x=1}$ y $\boldsymbol{y=2}$.**

Necesitamos tres rectas que se corten únicamente en el punto $(1,2)$.
Tomamos dos rectas distintas que pasen por $(1,2)$:
1. $x+y=c \implies 1+2=3 \implies x+y=3$.
2. $x-y=d \implies 1-2=-1 \implies x-y=-1$.
Este sistema tiene solución única $(1,2)$. Añadimos una tercera ecuación que también pase por $(1,2)$ y que no sea combinación lineal de las anteriores.
3. $2x+y=e \implies 2(1)+2=4 \implies 2x+y=4$.

El sistema es:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \\ 2x+y=4 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{x+y=3} \\ \boldsymbol{x-y=-1} \\ \boldsymbol{2x+y=4} \end{cases}}$$

# Ejercicio 2. Opción B. Análisis

**Sea la función $f(x) = x^3 - |x| + 2$.**

a) **Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.**
b) **Determine los extremos relativos de $f(x)$ en la recta real.**
c) **Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de f, el eje de abcisas $y = 0$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.**

**Solución:**

a) **Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.** Expresamos $f(x)$ a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x + 2 & \text{si } x \geq 0 \\ x^3 + x + 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

*Continuidad en $x = 0$:*
$f(0) = 2$.
$\lim_{x\to 0^+}(x^3 - x + 2) = 2$.
$\lim_{x\to 0^-}(x^3 + x + 2) = 2$.
Como los límites laterales coinciden con $f(0)$, es continua en $x = 0$.

*Derivabilidad en $x = 0$:*

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \\ 3x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+}(3x^2 - 1) = -1$. $f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-}(3x^2 + 1) = 1$. Como $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, no es derivable en $x = 0$.

$$\boxed{\textbf{La función } f(x) \textbf{ es continua en } x = 0 \textbf{ pero no es derivable en } x = 0.}$$

b) **Determine los extremos relativos de $f(x)$ en la recta real.**

*Punto de no derivabilidad:* $x = 0$. Como $f'(0^-) > 0$ (creciente) y $f'(0^+) < 0$ (decreciente), hay un máximo relativo en $x = 0$. Valor $f(0) = 2$.
*Puntos donde $f'(x) = 0$:*
Si $x < 0$: $f'(x) = 3x^2 + 1 = 0 \implies$ No hay solución real.
Si $x > 0$: $f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \implies x = 1/\sqrt{3}$.

| **Intervalo** | $(-\infty, 0)$ | $(0, 1/\sqrt{3})$ | $(1/\sqrt{3}, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| **Signo $f'(x)$** | $+$ | $-$ | $+$ |
| **Comportamiento $f(x)$** | Creciente $\nearrow$ | Decreciente $\searrow$ | Creciente $\nearrow$ |

$f''(x) = 6x$. $f''(1/\sqrt{3}) = 6/\sqrt{3} > 0 \implies$ Mínimo relativo en $x = 1/\sqrt{3}$.
Valor $f(1/\sqrt{3}) = (1/\sqrt{3})^3 - (1/\sqrt{3}) + 2 = 2 - 2/(3\sqrt{3}) = 2 - 2\sqrt{3}/9$.

$$\boxed{\textbf{Máximo relativo en } (0, 2)\textbf{. Mínimo relativo en } \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 2 - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right).}$$

c) **Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de f, el eje de abcisas $y = 0$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.** Comprobamos que $f(x) \geq 0$ en $[-1, 1]$. $f(-1) = 0$, $f(0) = 2$, $f(1/\sqrt{3}) > 0$,

$f(1) = 2$. Sí, es $\geq 0$. Área $A = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0}(x^3 + x + 2)dx + \int_{0}^{1}(x^3 - x + 2)dx$.

$$A = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{0}^{1}$$

$$A = \left(0 - (\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2)\right) + \left((\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2) - 0\right)$$

$$A = \left(-(-\frac{5}{4})\right) + \left(\frac{7}{4}\right) = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

$$\boxed{\text{Área} \mathbf{= 3\ u^2}}$$

# Ejercicio 3. Opción B. Geometría

**Dadas las rectas** $\boldsymbol{r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}}$ **y** $\boldsymbol{s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases}}$

**a) Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a r y a s.**
**b) Calcule la distancia entre r y s.**

**Solución:**

**a) Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a r y a s.**

Recta $r$: Punto $P(2,-1,-4)$, vector $\vec{u}=(1,1,-3)$.
Recta $s$: Planos $\pi_1 : x+z-2=0$, $\pi_2 : -2x+y-2z-1=0$. Vector $\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(1,0,1)\times(-2,1,-2)=(-1,0,1)$.
Punto $Q$ de $s$: Sea $x=0$. $z=2$. $y=1+2(0)+2(2)=5$. $Q(0,5,2)$.
Vector $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$: $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=(1,1,-3)\times(-1,0,1)=(1,2,1)$.
Plano $\pi_1$: Contiene $r$ y $\vec{w}$. Punto $P(2,-1,-4)$, vectores $\vec{u},\vec{w}$.

$$\pi = \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies 7(x-2)-4(y+1)+(z+4)=0 \implies 7x-4y+z-14=0$$

Plano $\pi_2$: Contiene $s$ y $\vec{w}$. Punto $Q(0,5,2)$, vectores $\vec{v},\vec{w}$.

$$\pi = \begin{vmatrix} x-0 & y-5 & z-2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies -2x-(y-5)(-2)+(z-2)(-2)=0 \implies x-(y-5)+(z-2)=0 \implies x-y+z+3=0$$

Recta perpendicular común $t=\pi_1\cap\pi_2$:

$$t \equiv \begin{cases} 7x-4y+z-14=0 \\ x-y+z+3=0 \end{cases}$$

$$\boxed{\boldsymbol{t \equiv \begin{cases} 7x-4y+z-14=0 \\ x-y+z+3=0 \end{cases}}}$$

**b) Calcule la distancia entre r y s.**

Vector $\vec{PQ}=Q-P=(0-2,5-(-1),2-(-4))=(-2,6,6)$.
Producto mixto $[\vec{PQ},\vec{u},\vec{v}]$:

$$\begin{vmatrix} -2 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2(1)-6(1-3)+6(0-(-1)) = -2+12+6=16.$$

Como es $\neq 0$, las rectas se cruzan.
Módulo del producto vectorial

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{w}|=|(1,2,1)|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$$

Distancia

$$d(r,s)=\frac{|[\vec{PQ},\vec{u},\vec{v}]|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{|16|}{\sqrt{6}}=\frac{16\sqrt{6}}{6}=\frac{8\sqrt{6}}{3}$$

$$\boxed{\boldsymbol{d(r,s) = \frac{8\sqrt{6}}{3}\ \mathbf{u}}}$$

# Ejercicio 4. Opción B. Probabilidad

**Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45% de los días. Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los de los últimos 50 años.**

a) **Exprese cómo calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.**
b) **Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.**

**Solución:**

a) **Exprese cómo calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.** Sea $X$ el número de días lluviosos en $n = 100$ días. $X$ sigue una distribución Binomial $B(n = 100, p = 0.45)$. La probabilidad exacta de que $X = 40$ es:

$$P(X = 40) = \binom{100}{40}(0.45)^{40}(1 - 0.45)^{100-40} = \binom{100}{40}(0.45)^{40}(0.55)^{60}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(X = 40) = \binom{100}{40}(0.45)^{40}(0.55)^{60}}}$$

b) **Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.**

Aproximamos $X \sim B(100, 0.45)$ por una Normal $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.
$\mu = np = 100(0.45) = 45$.
$\sigma^2 = np(1 - p) = 100(0.45)(0.55) = 24.75$.
$\sigma = \sqrt{24.75} \approx 4.975$.
Aproximación $Y \sim N(45, 24.75)$.
Aplicamos corrección por continuidad: $P(X = 40) \approx P(39.5 \leq Y \leq 40.5)$.
Estandarizamos $Z = (Y - \mu)/\sigma$:

$$P\left(\frac{39.5 - 45}{\sqrt{24.75}} \leq Z \leq \frac{40.5 - 45}{\sqrt{24.75}}\right) \approx P(-1.11 \leq Z \leq -0.90).$$

Usando la tabla N(0,1):

$$P(-1.11 \leq Z \leq -0.90) = P(Z \leq -0.90) - P(Z \leq -1.11) =$$

| z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | ~~0,5398~~ | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | ~~0,8159~~ | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |

$$= (1 - P(Z \leq 0.90)) - (1 - P(Z \leq 1.11)) = P(Z \leq 1.11) - P(Z \leq 0.90) \approx 0.8665 - 0.8159 = 0.0506.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(X = 40) \approx 0.0506}}$$